

Άνοιξη 2024

6/3/2024

Προβλήματα Κεφαλαίου 2

Οι λύσεις των προβλημάτων 10, 17, 29 και 31* να παραδοθούν μέχρι τις 22/3/2024

1.

Δυο διακρίσιμα, ανεξάρτητα μεταξύ τους συστήματα A και B, είναι σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T. Αν Z_A και Z_B είναι οι συναρτήσεις επιμερισμού τους, ποια είναι η συνάρτηση επιμερισμού Z για το συνδυασμένο σύστημα ;

2.

Δίνεται ένα σύστημα που αποτελείται από N ($N \gg 1$), όμοια, μη αλληλεπιδρώντα διακρίσιμα σωματίδια. Κάθε σωματίδιο μπορεί να βρεθεί σε μια από τις δυο μη-εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργειες 0 και $\epsilon > 0$. Το σύστημα έχει καθορισμένο όγκο V και είναι τελείως μονωμένο ως προς το περιβάλλον. Ο αριθμός κατάληψης της ανώτερης ενεργειακά στάθμης είναι n.

- (i) Να εκφράσετε την ενέργεια του συστήματος ως συνάρτηση των δεδομένων του προβλήματος.
- (ii) Να υπολογίσετε την θερμοκρασία T του συστήματος.
- (iii) Να υπολογίσετε τους αριθμούς κατάληψης των δυο ενεργειακών σταθμών, ως συνάρτηση των T, N, ϵ .
- (iv) Να υπολογίσετε τους αριθμούς κατάληψης των δυο ενεργειακών σταθμών στην περίπτωση που το σύστημα, βρίσκεται μέσα σε δεξαμενή θερμοκρασίας T.

3.

Οι ενεργειακές στάθμες ενός αρμονικού ταλαντωτή 3-διαστάσεων βρίσκονται σύμφωνα με την σχέση: $\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$, όπου τα n_1, n_2, n_3 είναι ακέραιοι αριθμοί $n_i = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Ο ταλαντωτής είναι σε επαφή με δεξαμενή θερμοκρασίας T, με την οποία μπορεί να ανταλλάσσει ενέργεια. Σε ποια θερμοκρασία η πιθανότητα να βρεθεί ο ταλαντωτής σε μια κατάσταση με ενέργεια $\frac{3}{2} \hbar \omega$, εξισώνεται με την πιθανότητα να βρεθεί αυτός σε μια κατάσταση με ενέργεια $\frac{5}{2} \hbar \omega$.

4.

Έστω ένα σύστημα N σωματιδίων τα οποία κατανομούνται σε δυο ιδιοκαταστάσεις 1 και 2, με ενέργειες E_1 και E_2 ($E_1 < E_2$) και πληθυσμούς n_1 και n_2 αντίστοιχα ($n_1 \gg 1$ και $n_2 \gg 1$). Το σύστημα αυτό είναι σε επαφή με μια δεξαμενή θερμοκρασίας T. Αν σε μια μόνο κβαντική εκπομπή προς την δεξαμενή, ένα σωματίδιο μεταβαίνει από την στάθμη 2 στην στάθμη 1, δώστε την έκφραση για την μεταβολή της εντροπίας:

- (i) στο σύστημα των δυο σταθμών και
- (ii) στη δεξαμενή,
- (iii) Αν η διαδικασία είναι αντιστρεπτή να βρείτε τον λόγο n_1/n_2 . Συμφωνεί με την σχέση Boltzmann;

5.

Οι τρεις χαμηλότερες στάθμες ενός μορίου είναι $E_1=0, E_2=\epsilon, E_3=10\epsilon$. Δείξτε ότι σε μια αρκετά χαμηλή θερμοκρασία (πόσο χαμηλή?) μόνο οι στάθμες E_1, E_2 είναι κατειλημμένες. Βρείτε την μέση ενέργεια E του μορίου στην θερμοκρασία T. Βρείτε τις συνεισφορές αυτών των σταθμών στην θερμοχωρητικότητα ανά μόριο, C_V και σχεδιάστε την C_V σαν μια συνάρτηση του T.

6.

Ένα σύστημα αποτελείται από σωματίδια που υπακούουν στην στατιστική Boltzmann και είναι σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας, θερμοκρασίας T . 3.1% του πληθυσμού βρίσκεται στην ενέργεια των 0.0281eV , το 8.5% στη 0.0195eV , το 23% στη 0.0109eV και 63% στη 0.0023eV . Ποια είναι η θερμοκρασία του συστήματος; Θεωρούμε, ότι δεν υπάρχει εκφυλισμός και ότι οι μεταπτώσεις γίνονται μόνο στη θεμελιώδη κατάσταση.

7.

Θεωρείστε το μοντέλο του μαγνήτη με N δίπολα, καθένα από τα οποία μπορεί να υπάρξει σε δυο καταστάσεις (προσανατολισμούς). Αν $N=4$, προσδιορίστε αναλυτικά και καταγράψτε τις διαφορετικές μικροκαταστάσεις για κάθε δυνατή μακροκατάσταση ενέργειας (όπως αυτή προσδιορίζεται από κάθε δυνατή τιμή της ενέργειας του συστήματος) καθώς και τα αντίστοιχα στατιστικά βάρη Ω .

8.

Αν «ρίξουμε» 8 νομίσματα τυχαία, ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε τουλάχιστον σε 4 από αυτά κεφαλή;

9.

Ένα σύστημα έχει μη εκφυλισμένες ενεργειακές στάθμες με ενέργεια $\varepsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, όπου $\hbar\omega = 1.4 \times 10^{-23}\text{ J}$, και n είναι θετικός ακέραιος ή μηδέν. Ποια είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην στάθμη $n=1$, αν βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας 1K ;

10.

Θεωρείστε μια ομάδα 7 spins που το καθένα από αυτά μπορεί να προσανατολιστεί είτε προς τα πάνω (\uparrow), είτε προς τα κάτω (\downarrow).

- (i) Ποιος είναι ο ολικός αριθμός των μικροκαταστάσεων για αυτό το σύστημα των 7- spins ?
- (ii) Πόσες μικροκαταστάσεις έχουν 4 spins \uparrow και 3 spins \downarrow ;
- (iii) Ποια είναι η πιθανότητα σε ισορροπία να έχουμε 4 spins \uparrow και 3 spins \downarrow ;
- (iv) Πόση είναι η εντροπία για τον σχηματισμό 4 spins \uparrow και 3 spins \downarrow ;
- (v) Υπολογίστε την εντροπία για όλες τις μακροκαταστάσεις. Σχεδιάστε την αντίστοιχη καμπύλη.

11.

Για να κερδίσουμε το ΛΟΤΤΟ πρέπει να διαλέξουμε 6 διαφορετικούς αριθμούς από τους 49 διαθέσιμους. Η σειρά επιλογής των αριθμών δεν παίζει κανέναν ρόλο. Αν θέλουμε να συμπληρώσουμε ένα μόνο δελτίο, τι πιθανότητα έχουμε να κερδίσουμε το ΤΖΑΚ ΠΟΤ;

12.

Ρίχνουμε 3 ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα

- (i) να δώσουν και τα τρία ζάρια τον ίδιο αριθμό;
- (ii) το άθροισμα των όψεων και των τριών ζαριών να είναι 11;
- (iii) κανένα ζάρι να μας δώσει βάρη;
- (iv) να πάρουμε τουλάχιστον ένα βάρη

13.

Παίρνουμε 10^{-6} J θερμότητας από ένα σύστημα θερμοκρασίας 300K και το προσθέτουμε σε ένα σύστημα θερμοκρασίας 299 K. Πόση είναι η συνολική μεταβολή της εντροπίας και των δυο συστημάτων και κατά ποιο παράγοντα θα αυξηθεί ο αριθμός των προσιτών καταστάσεων;

14.

Θεωρείστε δυο μαγνητικά συστήματα με 4 σπιν το καθένα, μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Τα σπινς στο Σύστημα 1 είναι πλήρως ευθυγραμμισμένα. Τα σπινς στο Σύστημα 2 είναι τελείως τυχαία. Τα δυο συστήματα έρχονται σε επαφή, έτσι ώστε να ανταλλάσουν ενέργεια μεταξύ τους. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας απαιτεί όπως η μαγνητική ροπή, και το συνολικό σπιν να είναι αμετάβλητο. Έτσι στην ισορροπία έχουμε ένα σύστημα με οκτώ σπινς με $N - N_z = 6$.

Ποια είναι η εντροπία του συνολικού συστήματος πριν αυτά έλθουν σε επαφή και μετά από αυτήν; Επιτρέπεται αυτή η διαδικασία από τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής;

15.

Ένα σύστημα έχει δυο ενεργειακές στάθμες, με ενεργειακό χάσμα 3.2×10^{-21} J. Η ανώτερη στάθμη είναι διπλά εκφυλισμένη και η βασική είναι μη εκφυλισμένη. Πόση είναι η πιθανότητα να είναι κατειλημμένη η κατώτερη ενεργειακά στάθμη, εάν βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας 150 K;

16.

Ένα σύστημα έχει τέσσερις μη-εκφυλισμένες στάθμες. Οι ενεργειακές στάθμες είναι $E_1=0$, $E_2=1.4 \times 10^{-23}$ J, $E_3=4.2 \times 10^{-23}$ J, $E_4=8.4 \times 10^{-23}$ J. Με δεδομένο ότι το σύστημα βρίσκεται σε θερμοκρασία 5 K, πόση είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί στην στάθμη $E_1=0$;

17.

Ένα σύστημα αποτελείται από M ($M \gg$) σωματίδια τα οποία είναι ανεξάρτητα και διακρίσιμα. Κάθε σωματίδιο έχει δυο μη εκφυλισμένες ενεργειακές στάθμες, με ένα ενεργειακό χάσμα $0.3eV$. Πόση είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην ανώτερη ενεργειακά στάθμη, εάν βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας 300 K; Σε ποια θερμοκρασία η πιθανότητα αυτή θα γίνει 0.60;

18.

Ένα σύστημα αποτελείται από N ($N \gg$) σωματίδια τα οποία είναι ανεξάρτητα και διακρίσιμα. Κάθε σωματίδιο έχει τρεις ενεργειακές στάθμες, ενέργειας 0, $100k_B$ και $200k_B$ με εκφυλισμούς αντίστοιχα 1, 3 και 5. Να υπολογίσετε την συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος, τον σχετικό πληθυσμό κάθε στάθμης, καθώς ακόμη και την μέση ενέργεια κάθε σωματιδίου για την θερμοκρασία 100 K.

19.

Οι επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες ενός αρμονικού ταλαντωτή δίνονται από την σχέση: $\epsilon_r = \left(r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$, όπου

$r = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Ο ταλαντωτής είναι σε ισορροπία με δεξαμενή θερμότητας, θερμοκρασίας T . Να υπολογιστεί η ενέργειας και η θερμοχωρητικότητα ενός συστήματος που αποτελείται από N τέτοιους διακρίσιμους και ανεξάρτητους (μη αλληλεπιδρώντες) αρμονικούς ταλαντωτές.

20.

Ένα σύστημα αποτελείται από M σωματίδια τα οποία είναι ανεξάρτητα και διακρίσιμα. Κάθε σωματίδιο έχει τρεις ενεργειακές στάθμες που αντιστοιχούν στους κβαντικούς αριθμούς $n=1, 2, 3$ με ενέργειες $E_n = ne$ και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_n = 2n-1$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T

- (i) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του σωματιδίου και του συστήματος συναρτήσει των T και ε .
- (ii) Να υπολογίσετε τους λόγους του πλήθους των σωματιδίων που βρίσκονται στις διεγερμένες στάθμες E_2 και E_3 , προς το πλήθος των σωματιδίων στη θεμελιώδη στάθμη E_1 (M_2/M_1 και M_3/M_1 αντίστοιχα).
- (iii) Να βρείτε τη μέση ενέργεια και τη θερμοχωρητικότητα του συστήματος και τα όρια των τιμών αυτών σε πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές θερμοκρασίες.
- (iv) Εάν $M=4500$ να βρείτε το συνολικό πλήθος καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα των M σωματιδίων, στις πολύ χαμηλές και στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες, αντίστοιχα.

21.

Θεωρήστε ένα σύστημα N μορίων. Κάθε μόριο έχει τρεις ενεργειακές στάθμες ($\varepsilon_0, \varepsilon_1$ και ε_2 , όλες με εκφυλισμό= 1). Οι αποστάσεις ανάμεσα στις στάθμες είναι: $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \varepsilon$ και $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1.20\varepsilon$. Η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης είναι $\varepsilon_0 = 0$.

(i) Να βρείτε την συνάρτηση επιμερισμού του μορίου και του συστήματος.

(ii) Καθορίστε το κλάσμα των μορίων στην θεμελιώδη κατάσταση στους 298K.

Θεωρείστε ότι $\varepsilon = 7.500 \times 10^{-21} \text{ J}$.

(iii) Οι εντάσεις των κορυφών στο φάσμα εκπομπής ενός μοριακού δείγματος είναι ανάλογες του πληθυσμού (ή τις πιθανότητες) των ενεργειακών σταθμών από τις οποίες γίνονται οι μεταπτώσεις. Πόσες κορυφές εκπομπής θα περιμένατε να δείτε στο απόλυτο μηδέν, στους 298K και στους 1000K.

(iv) Εάν προβλέπονται περισσότερες από μια κορυφές εκπομπής, ποιοι είναι οι λόγοι των κορυφών; (Υποθέστε ότι οι μεταβάσεις εκπομπής εμφανίζονται μόνο στη θεμελιώδη κατάσταση).

22.

Ένα σύστημα N ανεξάρτητων σωματιδίων, τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και το οποίο βρίσκεται σε επαφή με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T . Κάθε σωματίδιο έχει τρεις ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_n = n\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) όπου $n=1,2,4$. Οι αντίστοιχοι εκφυλισμοί των ενεργειακών σταθμών είναι 1,3,5.

Να βρείτε:

- (i) τη συνάρτηση επιμερισμού του ενός σωματιδίου και του συστήματος, συναρτήσει των ε και T .
- (ii) τη μέση ενέργεια του συστήματος.

Τι τιμή παίρνει αυτή όταν η θερμοκρασία T τείνει στο 0 και όταν τείνει στο άπειρο;

- (iii) την κατανομή σωματιδίων στις τρεις ενεργειακές στάθμες, για κάθε μία από τις παραπάνω οριακές θερμοκρασίες.

23.

Ένα σύστημα N ανεξάρτητων διακρισίμων σωματιδίων, βρίσκεται σε επαφή με θερμική δεξαμενή σταθερής θερμοκρασίας T και έχει έξι δυνατές ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_n = n\varepsilon$ όπου $n=1,2,\dots,6$, αντίστοιχα. Οι εκφυλισμοί των παραπάνω ενεργειακών σταθμών είναι αντίστοιχως, $g_n=1,2,\dots,6$. Να βρείτε:

(i) τη συνάρτηση επιμερισμού του ενός σωματιδίου και του συστήματος.

(ii) τη μέση ενέργεια του ενός σωματιδίου και του συστήματος

(iii) την εντροπία του συστήματος.

(iv) Τι τιμές παίρνουν τα παραπάνω μεγέθη στα όρια των πολύ χαμηλών και πολύ υψηλών θερμοκρασιών;

(v) Πως κατανομονται στις ενεργειακές στάθμες του συστήματος τα σωματίδια στα όρια των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών.

24.

Θεωρήστε ένα σύστημα N σωματιδίων με 3 μόνο δυνατές ενεργειακές καταστάσεις που απέχουν ϵ . Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ένα καθορισμένο όγκο V και είναι σε θερμική ισορροπία με μια δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T . Αγνοήστε τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα σωματίδια και θεωρήστε ότι εφαρμόζεται η στατιστική Boltzmann.

- (i) Ποια είναι συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος;
- (ii) Ποια είναι η μέση ενέργεια του συστήματος;
- (iii) Ποια είναι η πιθανότητα η τρίτη στάθμη να είναι κατειλημμένη στο όριο των υψηλών θερμοκρασιών $k_B T \gg \epsilon$; Εξηγήστε την απάντησή σας με φυσικούς όρους.
- (iv) Ποια είναι η μέση ενέργεια ανά σωματίδιο στο όριο των υψηλών θερμοκρασιών $k_B T \gg \epsilon$;
- (v) Σε ποιά θερμοκρασία η θεμελιώδης κατάσταση είναι κατειλημμένη 1.1 φορές περισσότερο από ότι η τρίτη στάθμη;
- (vi) Βρείτε την θερμοχωρητικότητα C_V , του συστήματος, αναλύστε τη συμπεριφορά της στα όρια υψηλών ($k_B T \gg \epsilon$) και χαμηλών θερμοκρασιών ($k_B T \ll \epsilon$) και σχεδιάστε την σε συνάρτηση με την θερμοκρασία T .

25.

Ένας κρύσταλλος N ατόμων ($N \gg 1$), εμφανίζει δυο τύπων θέσεις, τις "κανονικές" και τις "ενδόθετες" θέσεις. Οι κανονικές και οι ενδόθετες θέσεις είναι τακτοποιημένες πάνω σε 2 (αλληλοεισδυόμενα) κυβικά πλέγματα. Η ενέργεια ενός ατόμου στην ενδόθετη θέση είναι μεγαλύτερη από αυτή του ατόμου στην κανονική θέση κατά ϵ .

- (i) Θεωρούμε ότι ένα άτομο αφήνοντας μια κανονική θέση του πλέγματος μπορεί να μεταπηδήσει μόνο σε μια από τις οκτώ γειτονικές του ενδόθετες θέσεις. Να υπολογιστεί η εντροπία της μακροκατάστασης, όπου n άτομα βρίσκονται στις ενδόθετες θέσεις ($1 \ll n \ll N$), αγνοώντας όλες τις άλλες ιδιότητες του κρυστάλλου.
- (ii) Να υπολογίσετε το κλάσμα των ενδόθετων θέσεων που είναι κατειλημμένες στις χαμηλές θερμοκρασίες $T \ll \epsilon$. Οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε άτομα διαφορετικών θέσεων να θεωρηθούν αμελητέες.
- (iii) Να επαναλάβετε τον υπολογισμό της εντροπίας μελετώντας την περίπτωση όπου οι n μη κατειλημμένες θέσεις (κενά πλέγματος) δεν συσχετίζονται με τις n κατειλημμένες ενδόθετες θέσεις.

26.

Ένα σύστημα N ανεξάρτητων, διακρίσιμων σωματιδίων ορισμένου όγκου V , το οποίο βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με θερμική δεξαμενή ορισμένης θερμοκρασίας T , έχει τέσσερις δυνατές ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\epsilon_n = n\epsilon$ όπου $n=0,1,2,3$, αντίστοιχα. Η ενεργειακή στάθμη με ενέργεια ϵ είναι διπλά εκφυλισμένα. Να βρείτε:

- (i) Τη συνάρτηση επιμερισμού του ενός σωματιδίου και στη συνέχεια να βρείτε τη μέση ενέργεια, την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz και την εντροπία, ανά σωματίδιο.
- (ii) Στα όρια των πολύ υψηλών θερμοκρασιών ($k_B T \gg \epsilon$) και πολύ χαμηλών θερμοκρασιών, αντίστοιχα, να βρείτε την πιθανότητα να είναι κατειλημμένη η υψηλότερη και η χαμηλότερη ενεργειακά στάθμη καθώς και τη μέση ενέργεια ανά σωματίδιο.
- (iii) Σε ποια θερμοκρασία, η πιθανότητα κατάληψης της χαμηλότερα ενεργειακά στάθμης είναι 1.2 φορές την πιθανότητα κατάληψης της υψηλότερα ενεργειακά στάθμης;
- (iv) Να υπολογίσετε τη θερμοχωρητικότητα C_V του συστήματος και τις τιμές της στα όρια των πολύ χαμηλών και πολύ υψηλών θερμοκρασιών, αντίστοιχα.

27.

Ένα μονωμένο, μακροσκοπικό σύστημα θερμοκρασίας 300 K, απορροφά ένα φωτόνιο από το ορατό τμήμα του φάσματος (π.χ $\lambda=500$ nm). Να βρείτε την σχετική αύξηση $\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right)$ του αριθμού των προσιτών καταστάσεων του συστήματος.

28.

Θεωρείστε ένα μονωμένο σύστημα N ατόμων, καθ' ένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται σε τρεις καταστάσεις με ενέργεια $-\epsilon$, 0 , $+\epsilon$. Καθορίζουμε τις μακροκαταστάσεις του συστήματος με το N , την E (την ολική ενέργεια) και με το n , τον αριθμό των ατόμων στην κατάσταση μηδενικής ενέργειας.

(i) Προσδιορίστε αναλυτικά και γράψτε τις μικροκαταστάσεις του συστήματος που αντιστοιχούν στις μακροκαταστάσεις με $N=3$, $E=0$, $n=1$ και $N=3$, $E=0$, $n=3$ (αν θέλετε χρησιμοποιείτε το $-$, 0 και $+$ για να καθορίσετε σε κάθε περίπτωση την κατάσταση των ατόμων)

(ii) Αν n_+ και n_- είναι ο αριθμός των ατόμων στις καταστάσεις με ενέργεια $+\epsilon$ και $-\epsilon$, να δείξετε ότι για την μακροκατάσταση με $E=0$ ισχύει ότι:

$$n_+ = n_- = (N-n)/2$$

(iii) Να βρείτε το στατιστικό βάρους της μακροκατάστασης με $E=0$, (και με το n όπως ορίστηκε παραπάνω) είναι:

(iv) Να δείξετε ότι (για μεγάλα N) η εντροπία αυτής της μακροκατάστασης δίνεται από :

$$\frac{S(x)}{Nk_b} = -x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) + (1-x) \ln 2$$

$$\text{όπου } x=n/N$$

(v) Ποιες είναι οι τιμές $S(0)$ και $S(1)$; Εξηγήστε γιατί

Πότε εμφανίζεται μέγιστο η $S(x)$; Πόσο είναι αυτό; Εξηγήστε. Σχεδιάστε την $S(x)$.

29.

Ένα μακροσκοπικό σύστημα αποτελείται από N ($N \gg 1$) ίδια, διακρίσιμα σωματίδια, τα οποία δεν αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Κάθε σωματίδιο έχει τέσσερις δυνατές ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $E_n = n\epsilon$ ($\epsilon > 0$) με $n=1,2,3$ και 4 . Οι αντίστοιχοι εκφυλισμοί των παραπάνω ενεργειακών σταθμών είναι $1,4,2$ και 3 . Το σύστημα είναι σε επαφή με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T . Να βρείτε:

(i) τη συνάρτηση επιμερισμού του ενός σωματιδίου και του συστήματος.

(ii) τη μέση ενέργεια του ενός σωματιδίου και του συστήματος.

(iii) τους λόγους N_2/N_1 , N_3/N_1 και N_4/N_1 (όπου N_i οι πληθυσμοί των σταθμών E_i)

(iv) τη θερμοχωρητικότητα του συστήματος και τις τιμές της ενέργειας του συστήματος στις πολύ χαμηλές και στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες.

(v) Πως κατανέμονται τα σωματίδια στις ενεργειακές στάθμες του συστήματος στα όρια των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών.

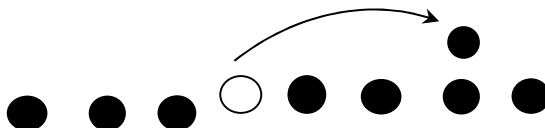
30.

Θεωρείστε μια επιφάνεια με N θέσεις παγίδες, στις οποίες είναι παγιδευμένα N άτομα (ένα ανά θέση). Τα άτομα μπορούν να παγιδευτούν σε έναν από τους παρακάτω δυο τύπους παγίδας: στον τύπο 1 με ενέργεια ϵ_1 , ή στον τύπο 2, με $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Αν η ολική ενέργεια είναι E , να υπολογίσετε:

- Πόσα άτομα μπορεί να παγιδευτούν στον τύπο παγίδας 1.
- Την εντροπία S της επιφάνειας, λόγω των παγίδων.
- Την θερμοκρασία T .
- Την θερμοχωρητικότητα C_v .
- Την εντροπία στην περίπτωση όπου ο αριθμός των ατόμων που μπορεί να παγιδευτούν είναι $N_0 < N$.

31.

Ενας κρύσταλλος έχει N πλεγματικές θέσεις. Στην θερμοκρασία του απολύτου μηδενός οι θέσεις καταλαμβάνονται από N άτομα, ένα ανά θέση. Σε υψηλότερες θερμοκρασίες δημιουργούνται ατέλειες, όταν άτομα αφήνουν τις θέσεις τους και μετακινούνται σε άλλη θέση (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα). Σε μια θέση δεν μπορούν να βρεθούν παραπάνω από δυο άτομα. Η ενέργεια μιας κενής θέσης είναι κατά ϵ_k μεγαλύτερη από την ενέργεια μιας θέσης με ένα άτομο, ενώ η ενέργεια μιας θέσης με δυο άτομα είναι κατά ϵ_{Δ} μεγαλύτερη από την ενέργεια μιας θέσης με ένα άτομο (για ευκολία θεωρούμε ότι η ενέργεια μιας θέσης με ένα άτομο είναι μηδέν).



Αν η ολική ενέργεια του συστήματος είναι E :

- Να υπολογιστεί ο αριθμός (N_{Δ}) των θέσεων όπου βρίσκονται δυο άτομα.
- Να βρεθεί η θερμοκρασία του συστήματος
- Από τον προηγούμενο υπολογισμό να μελετηθεί η εξάρτηση της ενέργειας του συστήματος από τη θερμοκρασία
- Να υπολογιστεί η θερμοχωρητικότητα του συστήματος

Να θεωρηθεί ότι $N \gg 1$ και $N_{\Delta} \gg 1$