

Άνοιξη 2024

15/3/2024

## Προβλήματα Κεφαλαίου 3

Οι λύσεις των προβλημάτων 6 και 7 να παραδοθούν μέχρι τις 29/3/2024

## 1.

Ένα στερεό τοποθετείται μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $B=3T$ . Το στερεό περιέχει ασθενώς αλληλεπιδρώντα άτομα με σπιν  $\frac{1}{2}$  και μαγνητική ροπή  $\mu$  ( $\mu=9.3 \cdot 10^{-23}$  J/T). Κάτω από ποια θερμοκρασία θα πρέπει να κρυώσουμε το στερεό, ώστε περισσότερα από τα 75% των ατόμων να προσανατολίζονται με το σπιν τους παράλληλα με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο;

## 2.

(α) Δίνεται ένα σύστημα  $N$  ομοίων μη-αλληλεπιδρώντων μαγνητικών διπόλων με σπιν  $\frac{1}{2}$  και μαγνητική ροπή  $\mu$  μέσα σε έναν τελείως μονωμένο κρύσταλλο, ο οποίος βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου  $B$ . Αν  $n$  είναι ο αριθμός των διπόλων με  $\mu$  παράλληλη προς το πεδίο, να υπολογιστεί η θερμοκρασία του συστήματος ως συνάρτηση των  $\mu$ ,  $B$ ,  $n$ .

(β) Θεωρείστε δυο τέτοια συστήματα με  $(N_1, n_1)$  και  $(N_2, n_2)$  τις αντίστοιχες τιμές τους. Τα φέρνουμε σε επαφή, ενώ παραμένουν μονωμένα ως προς το περιβάλλον. Βρείτε την ολική ενέργεια του συστήματος και την τελική κοινή θερμοκρασία τους (αγνοείστε άλλες μορφές ενέργειας που μπορεί να έχουν τα συστήματα).

(γ) Βρείτε για κάθε ένα από τα δύο συστήματα τον αριθμό των διπόλων με  $\mu$  παράλληλη προς το πεδίο, μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας (αγνοείστε άλλες μορφές ενέργειας που μπορεί να έχουν τα συστήματα).

## 3.

Σε ένα παραμαγνητικό υλικό δυο καταστάσεων, η μέθοδος συντονισμού ηλεκτρονικού σπιν (ESR), μπορεί να ανιχνεύσει την μικρότερη διαφορά ανάμεσα στο αριθμό των ηλεκτρονίων με παράλληλο και αντιπαράλληλο προσανατολισμό όταν αυτή είναι ίση με  $10^{10}$ . Αν το παραμαγνητικό δείγμα τοποθετηθεί μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $B=1T$ , σε θερμοκρασία 300K, να βρείτε τον ελάχιστο ολικό αριθμό των ηλεκτρονίων στο δείγμα, που απαιτείται για να γίνει δυνατή αυτή η ανίχνευση. Δίνεται ότι  $\mu = 9.3 \cdot 10^{-24}$  J/T.

## 4.

Με την βοήθεια της μικροκανονικής κατανομής να υπολογίσετε για ένα παραμαγνητικό υλικό:

- (i) την Εντροπία  $S(x)$ , την Ελεύθερη ενέργεια  $F(x)$  και την Μαγνήτιση  $J(x)$  ( $x=\mu B/k_B T$ ).
- (ii) την Εντροπία  $S(E)$  και την θερμοκρασία  $T(E)$

## 5.

Ένα παραμαγνητικό υλικό είναι σε επαφή με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας  $T$  και αποτελείται από  $N$  άτομα με μαγνητικές ροπές  $\mu$ . Αυτές όταν βρίσκονται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $B$ , μπορούν να έχουν τρεις δυνατούς προσανατολισμούς στο ίδιο επίπεδο, σχηματίζοντας ανά δύο γωνία  $120^\circ$  (θεωρούμε ότι η διεύθυνση του πεδίου και ο ένας προσανατολισμός είναι κατά τη φορά του άξονα  $y$  και ότι μεταξύ τους αλληλεπίδραση θεωρείται αμελητέα). Να βρείτε:

- (i) τη συνάρτηση επιμερισμού κάθε ατόμου και την συνάρτηση επιμερισμού του υλικού.
- (ii) τη μέση μαγνήτιση και τη μέση ενέργεια ανά άτομο καθώς και τις τιμές τους στα όρια των πολύ χαμηλών και πολύ υψηλών θερμοκρασιών.

Αν  $N=3000$ , να βρείτε πόσα άτομα καταλαμβάνουν κάθε μία από τις ενεργειακές καταστάσεις του συστήματος στα παραπάνω όρια.

## 6.

Θεωρείστε δυο μακροσκοπικά μονωμένα συστήματα  $A$  και  $B$ . Το σύστημα  $A$ , αποτελείται από  $N$  όμοια μη-αλληλεπιδρώντα μαγνητικά δίπολα με σπιν  $\frac{1}{2}$  και μαγνητική ροπή  $\mu$ , μέσα σε έναν τελείως μονωμένο κρύσταλλο, που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $10$  Tesla. Το σύστημα αυτό έχει προετοιμαστεί (ρυθμιστεί) σε θερμοκρασία σπιν κοντά στους  $0$  K. Το σύστημα  $B$ , ένα παρόμοιο με το  $A$ , έχει όμως ρυθμιστεί, ώστε να βρίσκεται σε συνθήκη ίσων πληθυσμών των δυο ενεργειακών καταστάσεων του σπιν. Τα δυο αυτά συστήματα έρχονται σε επαφή, ενώ παραμένουν μονωμένα ως προς το περιβάλλον.

Να βρείτε την θερμοκρασία σπιν που αποκτούν μετά την επαφή τους (αγνοείστε άλλες μορφές ενέργειας που μπορεί να έχουν τα συστήματα).

## 7.

Ένα σύστημα αποτελείται από  $N$  δίπολα με μαγνητική ροπής  $\mu$  το καθένα. Το ένα δίπολο βρίσκεται δίπλα στο άλλο και σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο μια μαγνητική αλυσίδα. Η αλυσίδα βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο και κάθε δίπολο μπορεί να προσανατολιστεί κατά μήκος τεσσάρων διευθύνσεων  $+x$ ,  $-x$ ,  $+y$  και  $-y$ . Το ένα άκρο της αλυσίδας είναι ελεύθερο, ενώ το άλλο άκρο της είναι σταθερό στο σημείο  $x=0$ ,  $y=0$ . Θεωρούμε ότι τα δίπολα δεν αλληλοεπιδρούν (η κατάσταση κάθε διπόλου δεν επηρεάζεται από την κατάσταση των δυο γειτόνων) και εφαρμόζουμε στο σύστημα αυτό ένα μαγνητικό πεδίο  $B$  στην  $+x$  διεύθυνση.

Να υπολογιστούν, η μέση ενέργεια, η εντροπία και η μαγνήτιση της αλυσίδας και να μελετηθούν αυτές στα όρια των υψηλών και των χαμηλών θερμοκρασιών. Να υπολογιστεί η πιθανότητα κάθε ενεργειακής κατάστασης και να μελετηθεί η συμπεριφορά της στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Συζητήστε την συμπεριφορά της μαγνητικής αλυσίδας σε αυτή την περίπτωση.

## 8.

Ένα δείγμα υλικού τοποθετείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $B$ . Κάθε πρωτόνιο σε αυτό το υλικό έχει σπιν  $\frac{1}{2}$  και μαγνητική ροπή  $\mu$ . Αν εφαρμοστεί ένα πεδίο ραδιοσυχνότητας αυτό μπορεί να προκαλέσει μεταπτώσεις ανάμεσα στις ενεργειακές στάθμες του σπιν, εφόσον η συχνότητα του  $\nu$ , ικανοποιεί την συνθήκη  $h\nu=2\mu B$ . Η ισχύς που απορροφάται τότε από αυτό το πεδίο ακτινοβολίας, είναι ανάλογη της διαφοράς του αριθμού των πυρήνων σε αυτές τις ενεργειακές στάθμες. Θεωρείστε ότι τα πρωτόνια στους πυρήνες είναι σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία  $T$ , η οποία είναι τόσο υψηλή ώστε  $\mu B \ll kT$ . Πως εξαρτάται τότε η απορροφούμενη ισχύς από την θερμοκρασία  $T$  του δείγματος;

## 9.

Μακροσκοπικό σύστημα αποτελείται από δύο υποσυστήματα: ένα υποσύστημα (A) με δύο σωματίδια με spin  $\frac{1}{2}$  και με μαγνητική ροπή  $\mu$  ο καθένα και ένα δεύτερο υποσύστημα (B) με τρία σωματίδια με spin  $\frac{1}{2}$  και με μαγνητική ροπή  $\mu$  το καθένα και είναι τοποθετημένα μέσα σε μαγνητικό πεδίο B.

- α) Ποιες είναι οι εφικτές καταστάσεις του συνολικού συστήματος; Για κάθε μία από αυτές, να βρείτε την ολική μαγνήτιση και ενέργεια.
- β) Θεωρούμε ότι τα υποσυστήματα αυτά αρχικά δε βρίσκονται σε επαφή και έχουν συνολική μαγνητική ροπή το μεν A ( $-2\mu$ ) και το B ( $3\mu$ ). Στην συνέχεια τα δύο αυτά υποσυστήματα έρχονται σε επαφή ανταλλάσσουν ενέργεια και φτάνουν σε κατάσταση ισορροπίας (το συνολικό σύστημα είναι απομονωμένο από το περιβάλλον). Να βρείτε:
- (i) τις πιθανότητες για να πάρουν οι ολικές μαγνητικές ροπές των δύο υποσυστημάτων μια από τις δυνατές τους τιμές ( $-2\mu$  και  $3\mu$  αντίστοιχα)
- (ii) τη μέση τιμή της μαγνητικής ροπής των δύο υποσυστημάτων καθώς και του συνολικού συστήματος.
- (iii) Ποια είναι η πιθανότητα, η ολική μαγνητική ροπή του πρώτου υποσυστήματος να πάρει την τιμή  $-2\mu$  και πόση είναι η μέση τιμή της μαγνητικής του ροπής στην περίπτωση που τα δύο υποσυστήματα χωρίζονται ξανά και δεν μπορούν πλέον να ανταλλάξουν ελεύθερα ενέργεια μεταξύ τους.

## 10.

Ένα μακροσκοπικό σύστημα βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο B και είναι σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T. Το σύστημα αυτό αποτελείται από δύο άτομα A και B που έχουν την ίδια μαγνητική ροπή με μέτρο  $\mu$ . Αυτές οι μαγνητικές ροπές μπορούν να προσανατολιστούν παράλληλα ή αντιπαράλληλα με το μαγνητικό πεδίο. Τα δύο άτομα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ενέργεια αλληλεπίδρασης ίση με  $-\lambda\mu^2$  ( $\lambda > 0$ ). Να βρείτε:

- (i) την ενέργεια της κάθε μίας από τις δυνατές καταστάσεις.
- (ii) τη συνάρτηση επιμερισμού και τη μέση ενέργεια του συστήματος.
- (iii) Στη περίπτωση που υπάρχουν 1000 ζευγάρια ατόμων που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, να περιγράψετε με ποιό τρόπο κατανέμονται αυτά σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες όταν  $B=0$  ή όταν  $B=(1/2)\lambda\mu$ .