Κεφάλαιο 7: Το κλασσικό ιδανικό αέριο

Ανακεφαλαίωση (Με τι ασχοληθήκαμε)

Μελετήσαμε το κλασσικό ιδανικό αέριο. Δώσαμε τον ορισμό του ιδανικού αερίου και καθορίσαμε ποια είναι τα χαρακτηριστικά της κλασσικής περιοχής.

Ο υπολογισμός αρχικά της συνάρτησης επιμερισμού του κλασσικού ιδανικού αερίου μας έδωσε την δυνατότητα να υπολογίσουμε όλες τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του (με την βοήθεια της ελεύθερης ενέργεια Helmoltz).

Αποδείξαμε τις δυο εξισώσεις που χαρακτηρίζουν θερμοδυναμικά το κλασσικό ιδανικό αέριο: την καταστατική εξίσωση $PV=NkT$ δηλαδή και τον νόμο Joule $E=E(T)$. Συζητήσαμε αναλυτικά για την θερμοχωρητικότητα του, ασχοληθήκαμε με τις ιδιότητες λόγω ταλάντωσης και περιστροφής στα διατομικά και πολυατομικά αέρια.

Υπολογίσαμε την εντροπία του κλασσικού ιδανικού αερίου λόγω μεταφορικής του κίνησης και συζητήσαμε αναλυτικά για το παράδοξο Gibbs και πως αυτό ερμηνεύεται (μη-διακρισιμότητα των σωματιδίων).

Παράλληλα μελετήσαμε τη συνθήκη κάτω από την οποία ισχύει η κλασσική αυτή προσέγγιση του ιδανικού αερίου (στατιστική *Maxwell-Boltzmann*).

Τέλος κάναμε μια σύντομη εισαγωγή στην κλασσική στατιστική (μελέτη στον χώρο των φάσεων). Υπολογίσαμε την συνάρτηση επιμερισμού για την περίπτωση αυτή και ασχοληθήκαμε με το θεώρημα ισοκατανομής, που είναι μια από τις πιο ενδιαφέρουσες ιδιότητες των συνεχών συστημάτων (διαπραγματεύεται το ότι, η ενέργεια μοιράζεται εξίσου ανάμεσα στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος).

Μετά από την μελέτη αυτού του κεφαλαίου πρέπει να ξέρουμε ότι:

- Ένα σύστημα λέγεται ***ιδανικό αέριο*** αν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων που το αποτελούν, είναι ***αμελητέες.***
- στο ***κλασσικό αέριο*** η πιθανότητα να είναι μια οποιαδήποτε μονοσωματιδιακή κατάσταση κατειλημμένη από περισσότερα του ενός μόρια είναι πάρα πολύ μικρή.
- Στην ***κλασσική*** αυτή ***προσέγγιση*** του ***ιδανικού αερίου*** (***στατιστική Maxwell-Boltzmann,*** στατιστική M.B), $(\overline{n}_i \ll 1)$ οι περισσότερες καταστάσεις είναι κενές, πολύ λίγες είναι κατειλημμένες από ένα σωματίδιο και ένας ασήμαντα μικρός αριθμός από αυτές έχει περισσότερα του ενός σωματίδια.
- στην κλασσική στατιστική (διακρίσιμα σωμάτια) η συνάρτηση επιμερισμού των N σωματίων είναι

$$Z = z^N ,$$

όπου z είναι η συνάρτηση επιμερισμού του ενός σωματίου

- ενώ στην περίπτωση που τα σωμάτια είναι μη διακρίσιμα η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται

$$Z = \frac{z^N}{N!}$$

διαιρείται δηλ. με τον παράγοντα N!, που είναι μια συνέπεια της μη-διακρισιμότητας των σωματίων.

- η κλασσική προσέγγιση $(\overline{n_i} \ll 1)$ ισχύει σε χαμηλές πυκνότητες και σε υψηλές θερμοκρασίες (όταν δηλ. η θερμοκρασία υπερβαίνει κατά πολύ μια χαρακτηριστική θερμοκρασία T_0).

$$\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \ll 1 \quad , \qquad T \gg T_o = \frac{h^2}{2\pi mk}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

- Το κλασσικό όριο ισχύει όταν η μέση απόσταση ανά σωμάτιο $l=(V/N)^{1/3}$ είναι πολύ μεγαλύτερη από το μέσο μήκος κύματος de Broglie λ_{dB} (όπου $\lambda_{dB}=\left(\frac{h^2}{3mk\mathrm{T}}\right)^{1/2}$ είναι το κβαντομηχανικό μήκος κύματος).
- η εντροπία λόγω μεταφορικής κίνησης στην περίπτωση του κλασσικού ιδανικού αερίου είναι η εξίσωση των Sackur-Tedrode:

$$S_{\mu\varepsilon\tau\alpha\phi}=Nk\left\{\ln\frac{V}{N}+\frac{3}{2}\ln T+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)+\frac{5}{2}\right\}$$

- κατά την ανάμιξη δυο διαφορετικών αερίων, που και τα δυο αρχικά περιέχουν N σωματίδια σε ένα όγκο V, εμφανίζεται μια αύξηση εντροπίας του συστήματος κατά $2Nk_B\ln 2$ (*εντροπία ανάμιξης*). Αν τα αέρια που αναμιγνύονται είναι ίδια, τότε κατά την ανάμιξη τους δεν εμφανίζεται καμία μεταβολή στην εντροπία.
- το παράδοξο Gibbs που ήταν ένα βασικό πρόβλημα της κλασσικής στατιστικής φυσικής στις αρχές του αιώνα, ερμηνεύεται με την θεώρηση που κάναμε σε αυτό το κεφάλαιο, των μη-διακρισίμων σωματιδίων, με την βοήθεια αυτής της σχέσης της εντροπίας (Sackur-Tedrode).
- η κλασσική συνάρτηση επιμερισμού στον χώρο των φάσεων υπολογίζεται από τη σχέση

$$Z=\frac{1}{h^{3N}N!}\int \mathrm{e}^{-\beta H(p,q)}dqdp$$

  με το H(p,q) να είναι η κλασσική Χαμιλτωνιανή και όπου το πολλαπλό ολοκλήρωμα $\int$, γίνεται πάνω στις 6N- μεταβλητές θέσεων και ορμών του φασικού χώρου των N-σωματίων.
- Για να ισχύει η κλασσική αυτή συνάρτηση επιμερισμού θα πρέπει οι αποστάσεις σε όλες τις διαδοχικές ενεργειακές στάθμες να είναι αρκετά μικρές, δηλ:

$$\left|E_{r+1}-E_r\right|<<kT$$

(περιορισμός ισχύος της κλασσικής συνάρτησης επιμερισμού)

- το θεώρημα ισοκατανομής προβλέπει για ένα σύστημα σε θερμοδυναμική ισορροπία σε θερμοκρασία T, ένα όρο $k_B T/2$ στη μέση ενέργεια του συστήματος, για κάθε συντεταγμένη θέσης ή ορμής που εμφανίζεται στην Χαμιλτωνιανή του σαν δευτεροβάθμιος μόνο όρος. Η αντίστοιχη συνεισφορά της στη θερμοχωρητικότητα του συστήματος είναι $k_B/2$.