Κεφάλαιο 11: *Σύστημα με μεταβλητό αριθμό σωματιδίων (Μεγαλοκανονική κατανομή) Ιδανικό κβαντικό αέριο*

Ανακεφαλαίωση (Με τι ασχοληθήκαμε)

Ασχοληθήκαμε με συστήματα με μεταβλητό αριθμό σωματιδίων. Τον τρίτο τρόπο αντιμετώπισης δηλαδή της στατιστικής φυσικής, όπου το σύστημα ορισμένου όγκου V είναι σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας και δεξαμενή σωματιδίων (κατανομή Gibbs –μεγαλοκανονική κατανομή).

Υπολογίσαμε την γενικευμένη (μεγαλοκανονική) συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος και το γενικευμένο του δυναμικό. Σαν εφαρμογή μελετήσαμε το κλασσικό ιδανικό αέριο και το κβαντικό ιδανικό αέριο. Στην συνέχεια μελετήσαμε το *κλασσικό όριο* για το οποίο η κβαντική στατιστική (στατιστική B.E και F.D) ανάγεται στην κλασσική στατιστική (στατιστική Maxwell-Boltzmann).

Ασχοληθήκαμε με τις ιδιότητες του αερίου Fermi-Dirac μέσω της μελέτης του αερίου των ελευθέρων ηλεκτρονίων στα μέταλλα, καθώς επίσης και με τις ιδιότητες του ιδανικού αερίου μποζονίων μη μηδενικής μάζας (συμπύκνωση κατά Bose- Einstein).

Μετά από την μελέτη αυτών των κεφαλαίων πρέπει να ξέρουμε ότι:

- Η πιθανότητα ένα σύστημα που είναι σε θερμική ισορροπία και σε ισορροπία διάχυσης με μια δεξαμενή θερμότητας σταθερής θερμοκρασίας T και χημικού δυναμικού μ, να βρίσκεται σε μια κατάσταση r με ενέργεια $E_{N,r}$ και με αριθμό σωματιδίων N είναι **η κατανομή Gibbs:**

$$p_{N,r} = \frac{e^{\beta(\mu N - E_{N,r})}}{\Xi}$$

Όπου Ξ είναι η ***γενικευμένη (μεγαλοκανονική) συνάρτηση επιμερισμού*** που ορίζεται:

$$\Xi \equiv \Xi(T,V,\mu) = \sum_N^{\infty} \left\{ \sum_{r(N)} e^{(\mu N - E_{N,r})/kT} \right\} = \sum_N^{\infty} Z(N) e^{\mu N/kT}$$

Z(N) είναι η κανονική συνάρτηση επιμερισμού,

$$Z(N) = Z(T,V,N) = \sum_r e^{-\beta E_{N,r}}$$

με το άθροισμα στην Z(N) να τρέχει πάνω σε όλες τις καταστάσεις r με καθορισμένο αριθμό σωματιδίων N.

- Ο μέσος αριθμός των σωματιδίων σε ένα σύστημα είναι

$$< N >= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$$

- η σχετική διακύμανση του αριθμού των σωματιδίων ενός τέτοιου συστήματος (σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας και σωματιδίων) είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του μεγέθους του (και να μπορούμε να το αποδείξουμε).

$$\frac{\Delta N}{\overline{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{\overline{N}}}$$

- Σαν συνέπεια αυτού, σε ένα μακροσκοπικό σύστημα με $<N>\sim 10^{23}$ σωματίδια, οι σχετικές διακυμάνσεις είναι πολύ μικρές, πράγμα που συνεπάγεται ότι ο αριθμός των σωματιδίων **<N>** είναι πρακτικά , εντελώς **καθορισμένος.**

- Για να είναι δύο συστήματα σε ισορροπία διάχυσης τα χημικά δυναμικά τους, μ, πρέπει να είναι ίσα.

$$\mu = -\mathrm{T}\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,P}$$

- τα **φερμιόνια** έχουν ημιάκεραιο σπιν (στροφορμή εξ ιδίας περιστροφής) και οι κυματοσυναρτήσεις ταυτοσήμων φερμιονίων είναι αντισυμμετρικές ως προς την εναλλαγή των συντεταγμένων των σωματιδίων, δηλ:

$$\Psi(r_1,.....,r_{i,}r_j,.....) = -\Psi(r_1,.....,r_{i,}r_j,.....)$$

Τα φερμιόνια υπακούουν στην στατιστική των ***Fermi-Dirac (F.D)***. Η επιτρεπόμενη κατάληψη, n_i της μονοσωματιδιακής κατάστασης i είναι n_i =0 ή 1.

- Τα **μποζόνια** έχουν άκεραιο σπιν και οι κυματοσυναρτήσεις ταυτοσήμων μποζονίων είναι συμμετρικές ως προς την εναλλαγή των συντεταγμένων των σωματιδίων, δηλ:

$$\Psi(r_1,.....,r_{i,}r_j,.....) = \Psi(r_1,.....,r_{i,}r_j,.....)$$

Τα μποζόνια υπακούουν στην στατιστική των ***Bose-Einstein (B.E)***. Η επιτρεπόμενη κατάληψη, n_i της μονοσωματιδιακής κατάστασης i είναι n_i =0,1,2,.....

- η μέση κατάληψη της μονοσωματιδιακής κατάστασης, i, με ενέργεια ε_i είναι:

$$\overline{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu(\mathrm{T}))} \pm 1}$$, + για τα φερμιόνια, - για μποζόνια

για τα μποζόνια μ(T)<0

- Η κβαντική στατιστική (στατιστική B.E και F.D) ανάγεται στην κλασσική στατιστική (στατιστική Maxwell-Boltzmann) στο ***κλασσικό όριο:***

$$e^{\mu\beta} << 1$$

- Που οδηγεί στο γνωστό (Κεφάλαιο 7) κριτήριο ισχύος της κλασσικής στατιστικής

$$\frac{\overline{\mathrm{N}}}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} << 1$$

- Η ενέργεια Fermi ε_F είναι η υψηλότερα κατειλημμένη ενεργειακή κατάσταση σε T=0K

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

- Ένα αέριο Fermi σε T=0 λέμε ότι είναι **πλήρως εκφυλισμένο**
- Σε ένα τυπικό μέταλλο η ενέργεια Fermi αντιστοιχεί σε μια θερμοκρασία Fermi $T_F = \varepsilon_F/k_B$ που είναι της τάξης των 10^4 Kelvin.
- Ένα αέριο ηλεκτρονίων σε θερμοκρασίες **$T \ll T_F$** λέμε ότι σε **εξαιρετικά εκφυλισμένη κατάσταση,** και σε αυτή την περίπτωση, τόσο η κατανομή ενέργειας, όσο και ο μέσος αριθμός κατάληψης διαφέρουν πολύ λίγο από τα αντίστοιχα μεγέθη σε T=0 K
- Για το αέριο των ηλεκτρονίων οι συνηθισμένες θερμοκρασίες T είναι πολύ μικρές σε σχέση με την θερμοκρασία Fermi (π.χ $T \sim 0.01\ T_F$), έτσι ώστε η περιγραφή του εκφυλισμένου αερίου Fermi να ισχύει και για θερμοκρασίες δωματίου .
- Η θερμοχωρητικότητα του ηλεκτρονικού αερίου για $T \ll T_F$, προκύπτει γραμμική ως προς την θερμοκρασία T

$$c_V(T) \sim \frac{3k}{T_F}T$$

- Σε ένα αέριο Bose για T<Tc, όπου Tc είναι η θερμοκρασία συμπύκνωσης, το ποσοστό των σωματιδίων που καταλαμβάνουν την βασική μονοσωματιακή κατάσταση ε_0 είναι

$$\frac{N_1}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2},$$

  Ενώ το χημικό δυναμικό είναι μ=0.

- η θερμοκρασία συμπύκνωσης για μποζόνια είναι

$$T_C \cong \frac{h^2}{2\pi m k_B}\left[\frac{1}{2.6}\frac{N}{V}\right]^{2/3}$$

- η θερμοχωρητικότητα σε ένα αέριο Bose για T<Tc προκύπτει ότι είναι

$$C_V = 1.93R\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

ξεπερνά δηλαδή στην θερμοκρασία συμπύκνωσης την κλασσική τιμή 3R/2. Σε υψηλές θερμοκρασίες ισχύει φυσικά το κλασσικό αποτέλεσμα.

- Στους 2.17 K, σε ατμοσφαιρική πίεση, το ^{4}He παρουσιάζει έναν μετασχηματισμό φάσης από το κανονικό υγρό (He I) στο 'υπερρευστό' (He II).
- Υπάρχει μια ομοιότητα ανάμεσα στην μετάβαση λάμδα του ^{4}He και στην συμπύκνωση Bose-Einstein των ιδανικών αερίων.

" Η περίληψη " των κατανομών

Κατανομή	Μακροκατάσταση	Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε μια από τις δυνατές καταστάσεις	Θερμοδυναμικό μέγεθος
Μικροκανονική (Μονωμένο Σύστημα)	***E, V, N σταθερά*** (*T* μεταβάλλεται)	$P_n = \frac{1}{\Omega}$	$S(E,V,N) = k_B \ln\Omega$
Κανονική (Σύστημα σε επαφή με Δ.Θ.)	***T, V, N σταθερά*** (E μεταβάλλεται)	$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z$
Μεγαλοκανονική (Σύστημα σε επαφή με Δ.Θ., Δ.Σ)	***T, V, μ σταθερά*** (*N, E* μεταβάλλονται)	$P_n = \frac{1}{\Xi} e^{-\frac{(E_n - \mu N_n)}{k_B T}}$	$\Omega(T,V,\mu) = -k_B T \ln\Xi$